Сојуз на математичари на Македонија
Општински натпревар по математика за учениците од основните училишта, 29.II-2020

4 – одделение

1. Бројот на недели со непарен датум во еден месец е непарен број, а бројот на сите останати денови во тој месец, кои имаат непарен датум е парен број. Во кој ден од седмицата е 29-ти од тој месец? Дали тој месец може да биде март?
Решение:

Јасно е дека првата недела од месецот мора да биде број од 1 до 7. Притоа непарен број непарни датуми кои се недела, се возможни ако неделата е 1-ви или 3-ти од месецот. Ако првата недела од месецот е на 3-ти, тогаш следните недели се $10,17,24$ и 31. Значи сите останати денови од тој месец со непарен датум се $1,5,7,9,11,13,15,19,21,23,25,27$ и 29, т.е. 13 но тоа не е парен број.	15 бодови
Според тоа бараниот месец ќе започне во недела т.е. недели се: $1,8,15,22$ и 29, а сите други денови со непарен датум се: $3,5,7,9,11,13,17,19,21,23,25,27$ кои се вкупно 12. Заради ова месецот мора да започне во недела и да има 30 дена или да е февруари во престапна година.	5 бодови
Конечно, 29-ти од тој месец е во недела и тој месец не може да биде март бидејќи март има 31 ден.	5 бодови

2. Цевка со должина $5m$ е поделена на еднакви делови со 4 сечења. Од секој дел е формиран правоаголник таков што должината е четирипати поголема од ширината. Колку cm изнесува должината на правоаголнкот?
Решение:

Со 4 сечења од цевката се добиваат пет дела, секој со должина $5:5=1m$. Од тоа што должината е четири пати поголема од ширината значи дека должината и ширината прават заедно пет еднакви дела.	15 бодови
Од тоа што периметарот на секој правоаголник е 1 метар се добива дека еден дел изнесува $1m:10=100cm:10=10cm$.	5 бодови
Конечно должината на правоаголникот изнесува $40cm$.	5 бодови

3. За призмата која има 7 ѕидови одреди го бројот на рабови и темиња.
Запиши го равенството кое важи меѓу бројот на темиња, рабови и ѕидови за било која призма и потоа провери го дека важи за дадената призма.
Решение:

Бројот на рабови на призмата со 7 ѕидови е 15, а бројот на темиња 10.	15 бодови
Равенството гласи: Ѕидови (S) + Темиња (T) = Рабови(P) + 2.	5 бодови
Дека ова равенство важи за дадената призма, се гледа од следниот израз: $7+10=15+2$	5 бодови

4. Збирот на сите страни на два квадрати е 96 cm. Ако страната на едниот квадрат е три пати поголема од страната на другиот квадрат, тогаш пресметај ги должините на страните на двата квадрати.
Решение:

Прв начин: Бидејќи страната на поголемиот квадрат е три пати поголема од страната на помалиот квадрат, а квадратот има четири еднакви страни, значи дека периметарот треба да се подели со 16. **Втор начин**: До истиот резултат ке дојдеме ако ја решиме равенката $4\cdot x+4\cdot 3\cdot x=96$, каде x е должината на страната на помалиот квадрат.	15 бодови
Страната на помалиот квадрат изнесува $96:16=6$ cm.	5 бодови
Тогаш страната на поголемиот квадрат е $6\cdot 3=18$ cm.	5 бодови

5 – одделение

1. Над секоја страна на даден правоаголник, надвор од него, конструираме рамностран триаголник. Да се пресмета периметарот на добиената фигура ако периметарот на правоаголникот е $72cm.$
Решение:

При конструирање на рамностраните триаголници секоја страна на правоаголникот ја заменуваме со две страни со иста должина.	10 бодови
Според тоа,периметарот на добиената фигура е двапати поголем од периметарот на правоаголникот.	10 бодови
$L=2\cdot 72=144cm.$	5 бодови

2. Растојанието помеѓу телефонските столбови на една улица долга $1600m$ било $80m$.Заради садење нови дрвца на улицата,столбовите биле разместени така што новото растојание помеѓу столбовите е $50m$. Колку столбови по разместувањето останале на истото место?
Решение:

$НЗС(50,80)=400$	5 бодови

$1600:400=4$	10 бодови
Неразместени столбови ќе има вкупно $1+1600:400=1+4=5$ столба. (Првиот столб не се поместува, си останува на своето место)	10 бодови

3. Даден е рамностран триаголник со плоштина $6cm^2$. Над секоја негова страна е конструиран рамностран триаголник. Да се пресмета плоштината на добиената фигура.
Решение:

При конструкцијата, над секоја страна на рамностран триаголник конструираме рамностран триаголник со што се добива фигура од 4 исти рамнострани триаголници.	15 бодови
Плоштината на добиента фигура е четири пати поголем од плоштината на рамностраниот триаголник	5 бодови
$P=4\cdot 6=24cm^2.$	5 бодови

4. Производот на три природни броја е $240.$ Производот на првиот и вториот број е 60, а производот на првиот и третиот број е $24.$ Кои се тие броеви ?
Решение:

Познато е дека: $a\cdot b\cdot c=240, a\cdot b=60, a\cdot c=24.$	5 бодови
Тогаш од $(a\cdot b)\cdot c=240$ и $a\cdot b=60$ имаме $60\cdot c=240$ односно $c=4.$	10 бодови
Заради $a\cdot c=24$ добиваме дека $a=6.$ Тогаш од $a\cdot b=60$ добиваме дека $b=10.$ Значи, бараните броеви се $6,10,4.$	10 бодови

6 – одделение

1.Периметарот на еден рамнокрак триаголник е 3 dm. Пресметај го неговиот крак b, ако неговата основа е страна на рамностраниот триаголник со периметар 18 cm.
Решение:

Одредување на страната на рамнокракиот триаголник $a = 18 : 3 = 6$ cm	5 бодови
3 dm = 30 cm	5 бодови
Од периметарот на рамникракиот триаголник $L = a + 2b$ се добива кракот $b = 12$ cm.	15 бодови

2.Две жаби во исто време го напуштаат брегот. Се движат по патека од 18 лилјани (барско растение). Првата скока на секој трет лилјан, а втората на секој втор лилјан. На колку исти лилјани ќе скокнат двете жаби и кои се тие?
Решение:

Првата жаба : 3,6,9,12,15,18	10 бодови
Втората жаба: 2,4,6,8,10,12,14,16,18	10 бодови
Двете жаби скокнале на три исти лилјани и тоа: 6 – ти, 12 –ти и 18 –ти.	5 бодови

3. Ако бројот 860 се подели со некој број, се добива остаток 9. Ако бројот 1 200 се подели со истиот број се добива остаток 16. Колку се количниците при делење на 860 и 1200 со тој број?
Решение:

Запис: 860 = $x\cdot k_1+9$ и 1200 = $x\cdot\ k_2+16$ или поинаку.	15 бодови
xk_1 =860 – 9 и xk_2 = 1200 – 16 , односно xk_1 =851 и xk_2 = 1184	5 бодови
Факторизација 851 = 37 · 23 и 1184 = 37 · 32, Количниците се 23 и 32.	5 бодови

4. Страните на еден правоаголен триаголник се последователни броеви. Периметарот на правоаголниот триаголник е 12dm. Над секоја страна од триаголникот е конструиран квадрат. Одреди ја плоштината на добиената фигура.
Решение:

Ознака за страните на триаголникот x-1, x , x+1 или поинаку.	5 бодови
Запишување на дадениот услов (x-1)+x+(x+1)=12 и одредување на страните на триаголникот. x=4, страните се 3dm,4dm и 5dm.	10 бодови
Плоштини на квадратите се 3·3=9dm^2, 4·4=16dm^2 и 5·5=25dm^2, на триаголникот е 6dm^2, а плоштината на добиената фигура е 6+9+16+25 , односно P=56dm^2.	10 бодови

7– одделение

1. Еден шестцифрен број завршува на цифрата 5. Ако таа цифра се премести на почетокот на бројот, т.е. се избрише од крајот и се допише на почетокот на бројот, тогаш новодобиениот број ќе биде 4 пати поголем од почетниот број. Одреди го почетниот број.

Решение:

Нека со x го означиме петцифрениот почеток на почетниот број, односно почетниот број е еднаков на $10x+5$.	5 бодови
Новодобиениот број може да се запише како $500\,000+x$,	10 бодови
Од условот на задачата се запишува равенката $4\cdot(10x+5)=500\,000+x$. Со решавање на равенката се добива дека $x=128\,200$. Почетниот број е 128 205.	10 бодови

2. 2Д формата на цртежот 1 е составена од 4 складни правоаголника, кај кои едната страна е два пати подолга од другата. Пресметај го периметарот на 2Д формата, ако нејзината плоштина е $72cm^2$.

Решение:

Ако плоштината на 2Д формата е $72cm^2$, тогаш плоштината на секој правоаголник е $18cm^2$.	10 бодови
Страните на правоаголникот се $6cm$ и $3cm$.	10 бодови
Периметарот на 2Д формата е $48cm$.	5 бодови

3. Во триаголникот ABC симетралите на аглите во темињата А и В се сечат под агол 140°. Висината и симетралата повлечени од аголот во темето С формираат агол од 20°. Одреди ги аглите во триаголникот.

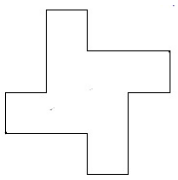
Решение:

Цртеж 2 и правилни ознаки	5 бодови
Од триаголникот ABF имаме дека $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+140^\circ=180^\circ$, т.е. $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=40^\circ$. Од тука $\alpha+\beta=80^\circ$, па $\gamma=180^\circ-80^\circ=100^\circ$.	10 бодови
Бидејќи $\angle ECA=\frac{\gamma}{2}=50^\circ$и аголот што го формираат симетралата и висината повлечени од темето С е 20° следи дека $\angle DCA=30^\circ$. Од правоаголниот триаголник ADC се добива дека $\alpha=60^\circ$. Збирот на аглите во еден триаголник е 180° од каде $\beta=20^\circ$.	10 бодови

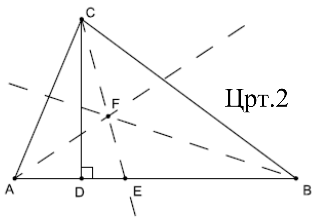
4. Во спортска продавница патиките се продавале за 900ден. поефтино од тренерката. На акција патиките биле намалени за 10% а тренерката за 5%. Габи купила патики и тренерка на намаление и за нив платила вкупно 5480 ден. Колку чинеле патиките, а колку тренеркатапред намалувањето?

Решение:

Цената на патиките пред намалувањето била p, а на тренерките била $p+900$.	5 бодови
После намалувањето важи: $$\frac{90}{100}p+\frac{95}{100}(p+900)=5480$$	15 бодови
Патиките пред намалувањето чинеле 2500 денари, а тренерката 3400 денари.	5 бодови



Црт.1



Црт.2

8– одделение

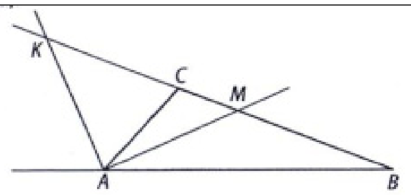
1. На табла се запишани два цели броеви со збир делив со седум. Третиот број се добива како разлика на првиот и вториот, четвртиот – како разлика на вториот и третиот, петтиот – како разлика на третиот и четвртиот, итн. Докажи дека збирот од квадратите на првите седум броја добиени на претходно опишаниот начин е делив со седум.

Решение:

Нека првите два членови на низата се $a_1=x, a_2=y$. Нивниот збир е делив со 7, значи постои цел број kза кој важи $x+y=7k$.	5 бодови
За останатите броеви, согласно со начинот на кој се конструираат, добиваме: $a_3=a_1-a_2=x-y$, $a_4=a_2-a_3=y-(x-y)=2y-x$, $a_5=a_3-a_4=(x-y)-(2y-x)=2x-3y$, $a_6=a_4-a_5=(2y-x)-(2x-3y)=5y-3x$, $a_7=a_5-a_6=(2x-3y)-(5y-3x)=5x-8y$.	5 бодови
${a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+{a_4}^2+{a_5}^2+{a_6}^2+{a_7}^2=$ $=x^2+y^2+(x-y)^2+(2y-x)^2+(2x-3y)^2+(5y-3x)^2+(5x-8y)^2=$ $=x^2+y^2+x^2-2xy+y^2+4y^2-4xy+x^2+4x^2-12xy+9y^2+$	15 бодови

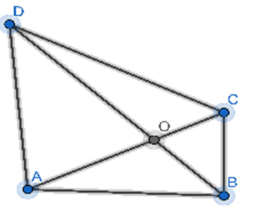
$+25y^2-30xy+9x^2+25x^2-80xy+64y^2=41x^2-128xy+104y^2=$ $=(42x^2-126xy+105y^2)-(x^2+2xy+y^2)=$ $=21(2x^2-6xy+5y^2)-(x+y)^2=7\cdot 3\cdot(2x^2-6xy+5y^2)-(7k)^2=$ $=7\cdot(3(2x^2-6xy+5y^2)-7k^2)$	

2. Во триаголникот ABC внатрешниот агол кај темето A е 50° . Симетралите на внатрешниот и надворешниот агол кај темето A ја сечат BC во точките M и K, соодветно. Пресметај ги аглите на триаголникот ABC ако триаголникот AMK е рамнокрак.
Решение:

 Аголот MAK е прав агол, па $\measuredangle AMK=\measuredangle MKA=45^\circ$.	10 бодови
Од триаголникот ACM имаме $\measuredangle ACM=180^\circ-45^\circ-25^\circ=110^\circ$.	10 бодови
Од триаголникот ABC се добива дека $\measuredangle ABC=180^\circ-50^\circ-110^\circ=20^\circ$.	5 бодови

3. Во конвексниот четириаголник $ABCD$ дијагоналите се сечат во точка O. Ако триаголниците AOB и COD имаат еднакви плоштини, тогаш четириаголникот $ABCD$ е трапез или паралелограм. Докажи!
Решение:

$P_{ABD}=P_{AOB}+P_{AOD}=P_{COD}+P_{AOD}=P_{ACD}\cdots(*)$	5 бодови
Триаголниците ABD и ACD имаат заедничка страна AD, па од $(*)$ следува дека имаат еднакви висини спуштени кон AD (од B и C соодветно).	10 бодови
Значи, точките B и C се на исто растојание од правата AD. Бидејќи точките се на иста страна од правата AD следува дека $BC\|AD$	10 бодови



4. Пресметај: $\frac{2^3\cdot 4^5\cdot 6^7}{8^9\cdot 10^{11}}:0{,}015^7$.
Решение:

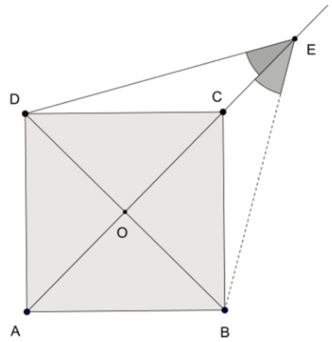
$\frac{2^3\cdot 4^5\cdot 6^7}{8^9\cdot 10^{11}}\cdot 0{,}015^7=\frac{2^3\cdot(2^2)^5\cdot 6^7}{(2^3)^9\cdot 10^{11}}:\left(\frac{15}{1000}\right)^5$	5 бодови
$\frac{2^3\cdot(2^2)^5\cdot 6^7}{(2^3)^9\cdot 10^{11}}:\left(\frac{15}{1000}\right)^5=\frac{2^3\cdot 2^{10}}{2^{27}\cdot 10^{11}}\cdot\left(\frac{6\cdot 1000}{3\cdot 5}\right)^7$	5 бодови
$\frac{2^3\cdot 2^{10}}{2^{27}\cdot 10^{11}}\cdot\left(\frac{6\cdot 1000}{3\cdot 5}\right)^7=\frac{1}{2^{27-13}\cdot 10^{11}}\cdot(400)^7=\frac{((2\cdot 10)^2)^7}{2^{14}\cdot 10^{11}}=\frac{2^{14}\cdot 10^{14}}{2^{14}\cdot 10^{11}}=10^3=1000$	15 бодови

9 – **одделение**

1. За природните броеви a,b,c,d е познато дека $ac+ad+bc+db=68$ и $c+d=4$.
Пресметај ја вредноста на изразот $a+b+c+d$.
Решение:

Од $ac+ad+bc+db=68$ добиваме дека $a\cdot(c+d)+b\cdot(c+d)=68$ односно $(a+b)\cdot(c+d)=68$.	10 бодови
Од тоа што $c+d=4$ ...(1) добиваме $(a+b)\cdot 4=68$.Значи, $a+b=17$ ...(2) .	10 бодови
Со собирање на равенствата (1) и (2) добиваме $a+b+c+d=21$.	5 бодови

2.Даден е квадрат $ABCD$. На продолжението на дијагоналата AC е избрана точка E така што $\overline{DE}=\overline{AC}$. Одреди ја големината на аголот DEC.
Решение:

Нека точката O е пресекот на дијагоналите. Тогаш имаме дека $\overline{BO} = \overline{DO}$. Од условот на задачата имаме дека $\overline{DE} = \overline{AC}$. Од тоа што $ABCD$ е квадрат имаме дека $\overline{BD} = \overline{AC}$. 	10 бодови
Значи, $\overline{BD} = \overline{DE}$ ...(1). Од друга страна имаме дека отсечката BE е слика на отсечката DE при осна симетрија во однос на правата AC. Така добиваме дека $\overline{BE} = \overline{DE}$ ...(2). Од (1) и (2) заклучуваме дека триаголникот BED е рамностран. Значи $\angle BED = 60^\circ$.	10 бодови
Од складноста на триаголниците BOE и DOE имаме дека $\angle DEO = \angle BEO = 30^\circ$. Значи, $\angle DEC = \angle DEO = 30^\circ$.	5 бодови

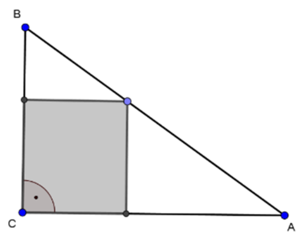
3. Одреди ги природните броеви a, b и c кои ги исполнуваат релациите:

$$a^2 + ab + ac = 20,$$
$$ab + b^2 + bc = 30 \text{ и}$$
$$ac + bc + c^2 = 50.$$

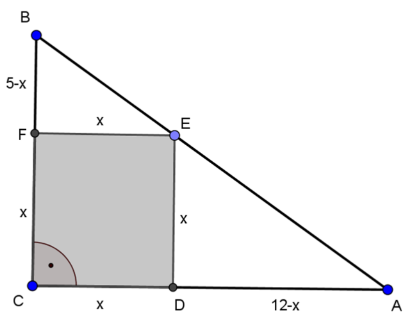
Решение:

Дадените релации ги запишуваме во облик $a(a+b+c) = 20$, $b(a+b+c) = 30$ и $c(a+b+c) = 50$.	10 бодови
Со нивно собирање добиваме $a(a+b+c) + b(a+b+c) + c(a+b+c) = 100$, $(a+b+c)(a+b+c) = 100$, т.е. $(a+b+c)^2 = 100$.	10 бодови
Имајќи во предвид дека a, b и c се природни броеви, оттука следува дека $a+b+c=10$. Од ова равенство и дадените услови во задачата добиваме дека бараните броеви се $a = 2$, $b = 3$ и $c = 5$.	5 бодови

4. Пресметај ја плоштината на квадратот впишан во правоаголен триаголник со хипотенуза $13cm$ и катета $5cm$ (види цртеж).



Решение:

Нека $c = 13$, $a = 5$ тогаш од питагорова теорема имаме $5^2 + b^2 = 13^2$ односно $b^2 = 144$, т.е. $b = 12$. 	10 бодови
Од сличноста на триаголниците AED и EBF ја добиваме пропорцијата $(12-x):x = x:(5-x)$. На тој начин имаме $(12-x)\cdot(5-x) = x^2$ од каде се добива дека $x = \frac{60}{17}$.	10 бодови
Од формулата за плоштина на квадрат добиваме дека $P = x^2 = \frac{3600}{289}$.	5 бодови