XLV ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНИТЕ УЧИЛИШТА
22-23.08.2020 година

8 одделение

1. Докажи дека изразот $3^{2020}-1$ е делив со 80.

Решение: Прв начин:
$1+3+3^2+\cdots+3^{2018}+3^{2019}=3^0+3^1+3^2+\cdots+3^{2018}+3^{2019}$
Овој израз има 2020 собироци. Ги групираме по четири собироци:

$=(3^0+3^1+3^2+3^3)+(3^4+3^5+3^6+3^7)+\cdots+(3^{2016}+3^{2017}+3^{2018}+3^{2019})=$
$=40+3^4(3^0+3^1+3^2+3^3)+\cdots+3^{2016}(3^0+3^1+3^2+3^3)=$
$=40+3^4\cdot 40+\cdots+3^{2016}\cdot 40=$
$=40(1+3^4+\cdots+3^{2016})$.

Добиваме
$3^{2020}-1=(1+3+3^2+\cdots+3^{2018}+3^{2019})(3-1)=40(1+3^4+\cdots+3^{2016})\cdot 2=80(1+3^4+\cdots+3^{2016})$ што требаше да се докаже.

Втор начин:
$3^{2020}-1=(3^4)^{505}-1=(3^4-1)((3^4)^{504}+\cdots+1)=80\cdot((3^4)^{504}+\cdots+1)$ што требаше да се докаже.

Трет начин:

$$3\equiv 3(mod\ 80)$$
$$3^2\equiv 9(mod\ 80)$$
$$3^3\equiv 27(mod\ 80)$$
$$3^4\equiv 1\ (mod\ 80)$$
$$\vdots$$
$$(3^4)^{505}\equiv 1(mod\ 80)$$

Од каде добиваме: $3^{2020}-1\equiv 0(mod\ 80)$.

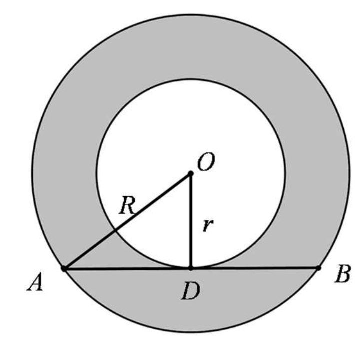
2. Радмила на пазар донела лубеници. На првиот купувач му продала половина од вкупниот број лубеници и уште половина лубеница. На вториот, му продала половина од преостанатите лубеници и уште половина лубеница. Слично, на третиот му продала половина од преостанатите лубеници и уште половина лубеница. После тоа, и останала една лубеница. Колку лубеници донесла Радмила на пазарот?

Решение: Прв начин: Очигледно е дека пред третиот купувач да земе половина лубеница, имало 1,5 лубеници, а пред да земе „моментална“ половина од лубениците, имало 3 лубеници. Пред вториот купувач да земе половина лубеница, имало 3,5 лубеница, а пред да земе „моментална“ половина од лубениците, имало 7 лубеници. Пред првиот купувач да земе половина лубеници, имало 7,5 лубеници, а пред да земе половина од лубениците, имало 15 лубеници. Значи, Радмила на пазарот донела 15 лубеници.

Втор начин:
Нека Радмила на почетокот имала x лубеници. Откако, првиот купувач зел половина од вкупниот број на лубеници и уште половина лубеница, останале $x-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=\frac{x-1}{2}$ лубеници.
Откако, вториот купувач зел половина од преостанатите лубеници и уште половина лубеница, останале $\frac{x-1}{2}-\frac{x-1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{2x-2-x+1-2}{4}=\frac{x-3}{4}$ лубеници.
Откако, третиот купувач зел половина од преостанатите лубеници и уште половина лубеница, во корпата останале $\frac{x-3}{4}-\frac{x-3}{8}-\frac{1}{2}=\frac{2x-6-x+3-4}{8}=\frac{x-7}{8}$ лубеници.
Бидејќи на крајот во корпата останала 1 лубеница, имаме дека $\frac{x-7}{8}=1$, од каде $x=15$. Значи, Радмила на пазарот донесла 15 лубеници.

3. Дадени се две концентрични кружници. Една тетива на поголемата кружница што ја допира помалата кружница има должина 2 cm. Пресметај ја плоштината на кружниот прстен?

Решение: Нека со точката O го означиме центарот на дадените кружници, со AB дадената тетива и со D ја означиме средината на AB. Да забележиме дека радиусите на кружниците се $R=\overline{OA}$ (на поголемата) и $r=\overline{OD}$ (на помалата). Со примена на Питагоровата теорема за ΔADO добиваме $R^2-r^2=\overline{AD}^2=1$.
Оттука, за плоштината на прстенот имаме
$P=R^2\pi-r^2\pi=(R^2-r^2)\pi=1\cdot\pi\approx 3{,}14$ cm^2.



4. Докажи дека во секој триаголник ABC важи формулата
$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r},$$
каде h_a, h_b, h_c се висините, а r е радиусот на впишаната кружница во триаголникот.

Решение:
Нека O е центар на впишана кружница. Бидејќи O е внатрешна точка за триаголникот ABC, плоштината на ABC е еднаква на збирот од плоштините на триаголниците ABO, BCO и CAO. Висината на секој од последните три триаголници е радиусот r на впишаната кружница.
Значи, $\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=P$, а оттука после делењето со P се добива $\frac{ar}{2P}+\frac{br}{2P}+\frac{cr}{2P}=1$. Од друга страна, користејќи дека $P=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$, имаме
$2P=ah_a=bh_b=ch_c$. Со замена, добиваме $\frac{ar}{ah_a}+\frac{br}{bh_b}+\frac{cr}{ch_c}=1$, односно $\frac{r}{h_a}+\frac{r}{h_b}+\frac{r}{h_c}=1$.
Ако последното равенство го поделиме со r заклучуваме дека $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$, што требаше да се докаже.