XLV ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНИТЕ УЧИЛИШТА
22-23.08.2020 година

9 одделение

1. Докажи дека за произволни реални броеви x, y и zважи неравенството:

$$3(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2$$

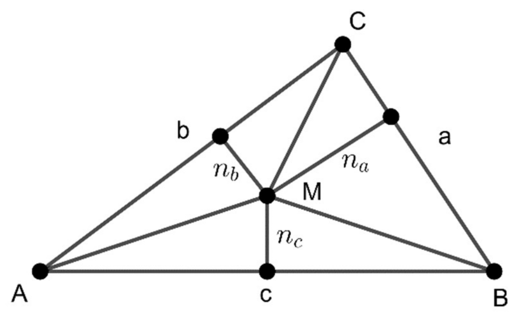
Решение: $3(x^2+y^2+z^2) = 3x^2+3y^2+3z^2-2xy+2xy-2yz+2yz-2zx+2zx =$
$= (x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)+x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx =$
$= (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2+(x+y+z)^2 \geq (x+y+z)^2$,
бидејќи $(x-y)^2 \geq 0, (y-z)^2 \geq 0$ и $(z-x)^2 \geq 0$.
Равенство се добива ако и само ако $x=y=z$.

2. Нека a и b се реални броеви такви што $a>b>0$ и $a^2+b^2=6ab$. Одреди ја вредноста на изразот $\frac{a+b}{a-b}$.

Решение: Со трансформација на даденото равенство, добиваме $a^2+2ab+b^2=8ab$ и $a^2-2ab+b^2=4ab$, односно $(a+b)^2=8ab$ и $(a-b)^2=4ab$. Делејќи ги овие равенства едно со друго, имаме $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}=\frac{8ab}{4ab}=2$. Оттука $\frac{a+b}{a-b}=\sqrt{2}$.

3. Во внатрешноста на триаголник ABC е избрана произволна точка M. Должините на нормалите спуштени од точката M врз страните BC, CA, AB, соодветно, се n_a, n_b, n_c.
Докажи дека $\frac{n_a}{h_a}+\frac{n_b}{h_b}+\frac{n_c}{h_c}=1$, каде h_a, h_b, h_c се должините на соодветните висини во триаголникот.

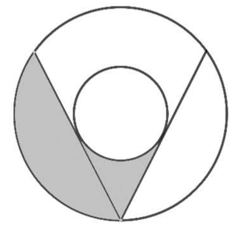
Решение:



Отсечките MA, MB, MC го делат триаголникот ABC на три триаголници со плоштини $\frac{1}{2}an_a, \frac{1}{2}bn_b, \frac{1}{2}cn_c$. Збирот на овие три плоштини е еднаков на плоштината P на триаголникот ABC, т.е. $\frac{1}{2}an_a+\frac{1}{2}bn_b+\frac{1}{2}cn_c=P$. Оттука, после делењето на равенството со P, се добива

$\frac{a}{2P}n_a + \frac{b}{2P}n_b + \frac{c}{2P}n_c = 1$. Бидејќи $P = \frac{1}{2}ah_a, P = \frac{1}{2}bh_b, P = \frac{1}{2}ch_c$ и $h_a = \frac{2P}{a}$, $h_b = \frac{2P}{b}$, $h_c = \frac{2P}{c}$, имаме $\frac{n_a}{h_a} + \frac{n_b}{h_b} + \frac{n_c}{h_c} = 1$ што требаше да се докаже.

4. Радиусите на концентричните кружници кои образуваат кружен прстен прикажан на сликата имаат должини r и $2r$. Одреди го односот на плоштините на обоениот и необоениот дел од кружниот прстен.



Решение: Нека A, B и C се заеднички точки на поголемата кружница и тангентите t_1 и t_2 на помалата кружница, и нека T е точка во која t_1 ја допира помалата кружница. Бидејќи $\overline{OB} = 2\overline{OT}$, имаме $\sphericalangle OBT = 30°$, а според тоа $\sphericalangle BAC = 60°$. Имено, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle OAB + \sphericalangle OAC = 2\sphericalangle OAB = 2\sphericalangle OAT = 2\sphericalangle OBT$. Да забележиме дека при првото равенство е искористено дека правата OA е оска на симетрија на целата геометриска конфигурација. Од истата симетрија имаме дека $\overline{AB} = \overline{AC}$.
Значи, триаголникот ABC е рамностран, па отсечоците на поголемиот круг се еднакви. Со оглед на тоа што T е средишна точка на отсечката AB, заклучуваме дека помалата кружница е впишана во ΔABC. Следствено, обоениот дел на кружниот прстен е третина од целиот прстен, па плоштините на обоениот и необоениот дел на овој прстен се однесуваат како 1:2.